ಭಿನ್ನರಾಶಿ

ಹಲವು ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಗಳು

ಮೂಲ: ರಿಚಾ ಗೋಸ್ವಾಮಿ | ಅನುವಾದ : ಚೈತನ್ಯ ಅಸೋಸಿಯೇಟ್ಸ್, ಮೈಸೂರು

ಪ್ರವೇಶಿಕೆ

ಗಣಿತವು ಕಬ್ಬಿಣದ ಕಡಲೆಯೆಂದೇ ಕುಖ್ಯಾತಿ ಗಳಿಸಿದೆ. ಒಟ್ಟಂದದಲಿ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಕಂಡರೆ ಭಯವೂ ಜುಗುಪ್ಸೆಯೂ ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ; ಇದೇ ಮಾತನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಕುರಿತಾಗಿಯೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಗಣಿತವು ಕಠಿಣವೆನಿಸಲು ಹಲವು ಕಾರಣಗಳಿವೆ. ಈಗಾಗಲೇ ಅಂಥ ಕೀರ್ತಿ ಸಂದಿರುವುದೂ ಇದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಕಾರಣವಾಗಿದೆ. ಶಿಕ್ಷಕರು ಮತ್ತು ಪಾಲಕರು (ಮತ್ತು ಅದರಿಂದಾಗಿ ಮಕ್ಕಳು) ಗಣಿತ ಕಠಿಣವೆಂಬ ಪೂರ್ವಗ್ರಹದಿಂದಲೇ ಬೋಧನೆ ಮತ್ತು ಕಲಿಕೆಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಆರಂಭಿಸುತ್ತಾರೆ. ಗ್ರಹಿಸಲು ಮತ್ತು ಒಡನಾಡಲು ಸ್ವಲ್ಪ ಕಠಿಣವೆನಿಸಲು ಇರುವ ಕಾರಣಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಸ್ವರೂಪವೂ ಸೇರಿದೆ. ಉಳಿದ ವಿಷಯಗಳ ಕುರಿತಾಗಿ ಹೀಗಿಲ್ಲ. ಗಣಿತವು ಊಹನೆಗಳು ಮತ್ತು ತಾರ್ಕಿಕ ಸಾಧನಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿದ ಅತ್ಯಂತ ಅಮೂರ್ತ ಅಧ್ಯಯನ ಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿದೆ. ತಾರ್ಕಿಕತೆಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ನಿರ್ಮಿಸಿರುವ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿ ಅದು ಶ್ರೇಣೀಕೃತ ಸ್ವರೂಪದ್ದಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮುಂದೆ ಸಾಗುತ್ತಿರುವಂತೆ ಹಿಂದಿನ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಅರಿವು ಅತ್ಯಗತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉಹಾಹರಣೆಗೆ, ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಕಲಿಯುವ ಮೊದಲು ಸಂಕಲನದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಕಲಿತು ಅದರಲ್ಲಿ ಪರಿಣತಿ ಹೊಂದಿರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿಸಲಾಗುವ ಅತ್ಯಂತ ಅಮೂರ್ತ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯೂ ಒಂದು. ಅದುವರೆಗೆ ಪರಿಚಯಿಸಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮೂಹ (ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು) ಗಳಿಗೆ ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಎಣಿಕೆ ಮಾಡುವ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಳಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅವು ಮೂಲಭೂತವಾಗಿ ಒಂದು ಅನುಪಾತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಕಲಿಕೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಬೋಧನಾ ತತ್ತ್ವಗಳ ಕುರಿತಾಗಿ ಸಾಕಷ್ಟು ಸಂಶೋಧನೆಗಳು ನಡೆದಿವೆ. ಭಿನ್ನರಾಶಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಮೂಡುವ ತಪ್ಪು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಕುರಿತಾಗಿ ಮಾತ್ರ ನಾನು ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಸೂಚಿ ಪದಗಳು: ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಗಳು, ತಪ್ಪುಗಳು, ಭಿನ್ನರಾಶಿ, ಭಾಗ , ಪೂರ್ಣ, ಲ.ಸಾ.ಅ. , ಪ್ರತಿನಿಧೀಕರಣ, ಬೋಧನಾ ವಿಜ್ಞಾನ.

ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಗಳು

ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಗಳು, ತಪ್ಪುಗಳು, ದೋಷಗಳು, ಪರ್ಯಾಯ ನೆಲೆಗಟ್ಟುಗಳು ಇತ್ಯಾದಿ ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ಸಂವಾದಿ ಶಬ್ದಗಳೆಂದು ಬಳಕೆ ಮಾಡುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ನಾನು ಅವನ್ನು ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದೇನೆ. ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಗಳು ಹಾಗೂ ಪರ್ಯಾಯ ನೆಲೆಗಟ್ಟುಗಳು ಇವೆರಡೂ ಸರಿಸುಮಾರು ಒಂದೇ ಅರ್ಥ ಉಳ್ಳವು. ಅದೇ ರೀತಿ ತಪ್ಪುಗಳು ಮತ್ತು ದೋಷಗಳು ಕೂಡ. ಅವೆರಡರ ನಡುವೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಇಲ್ಲವೆಂದಲ್ಲ. ಆದರೆ ಈ ಲೇಖನದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಾನು ಆ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ತಪ್ಪು ಯಾವಾಗಲೂ ಅಸಡ್ಡೆಯ, ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ತಪ್ಪಾಗಿ ಬಳಸುವ, ಆ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಕುರಿತಾದ ತಿಳಿವಳಿಕೆಯ ಕೊರತೆಯ ಅಥವಾ ಮಗು ತನ್ನ ಪ್ರಸಕ್ತ ಮಟ್ಟಕ್ಕೂ ಮೀರಿದ ಕಾರ್ಯಗಳನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವ ಕಾರಣಗಳಿಂದಾಗಿ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತವಾಗಿ, ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಯೆಂದರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿಚಾರ ಇಲ್ಲವೇ ಉಪವಿಷಯ ಇಲ್ಲವೇ ಉಪಕ್ರಮವು ಮಗು ಗ್ರಹಿಸಿರುವ ರೂಪಕ್ಕೂ ಗಣಿತ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಅದು ಒಪ್ಪಿತವಾಗಿರುವ ರೂಪಕ್ಕೂ ನಡುವೆ ಸಂಘರ್ಷವುಂಟಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕಿದೆ(Barmby et al., 2009). ಅದು ಒಂದು ನಿಯಮವನ್ನು ತಪ್ಪಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸಿದ ಸಂದರ್ಭವಾಗಿರಬಹುದು, ಅತಿಯಾದ ಅಥವಾ ತೀರಾ ಕಡಿಮೆ ಪ್ರಮಾಣದ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣವಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ದತ್ತ ಸನ್ನಿವೇಶದ ಪರ್ಯಾಯ ನಿರೂಪಣೆಯಾಗಿರಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ."ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ" ಎನ್ನುವ ನಿಯಮವು ಕೆಲವೆಡೆ ಮಾತ್ರ ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಅದು 35 ಮತ್ತು 358 ಇವೆರಡನ್ನು ಹೋಲಿಸುವಾಗ ಸರಿ ಉತ್ತರ ನೀಡುತ್ತದೆ; 35 ಮತ್ತು 3.58 ಇವೆರಡನ್ನು ಹೋಲಿಸುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಲ್ಲ. ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಗಳು ತಪ್ಪುಗಳಂತಲ್ಲ; ಅವು ಮಗುವಿನ ಗ್ರಹಿಕೆಯ ಸಂಕೇತಗಳಾಗಿವೆ. ಇದನ್ನೇ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಮಗುವಿನ ಕಲಿಕೆಯ ಪ್ರಸಕ್ತ ಮಟ್ಟದ ಸೂಚಿಯೆಂದೇ ಹೇಳಬಹುದು. ಹಾಗಾಗಿ, ಒಬ್ಬ ಶಿಕ್ಷಕರ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಿಂದ ಯೋಚಿಸುವುದಾದರೆ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಹೊರಗೆಳೆದು ಬಿಡಿಸಿಡುವುದು ಬಹು ಉಪಯುಕ್ತ ಸಂಗತಿ; ಅದು ಬೋಧನೆ-ಕಲಿಕೆಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಮುಂದಿನ ಹಂತಗಳಿಗೆ ದಾರಿದೀಪವಾಗುತ್ತದೆ.

ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಬಗೆಗಿನ ಕೆಲವು ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಗಳು

ಜನರನ್ನು ಗಣಿತದಿಂದ ದೂರವಿರಿಸಿ ಭಯಪಡಿಸುವಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಪಾತ್ರ ಹಿರಿದಾದುದೆಂದು ಅನೇಕ ಬಾರಿ ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಮೊದಲೇ ಚರ್ಚಿಸಿದಂತೆ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಹೌದು ಎನ್ನುವ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಅಮೂರ್ತತೆಯನ್ನು ಗ್ರಹಿಸುವುದು ಕಠಿಣ. ಇದು ಸಾಲದೆಂಬಂತೆ, ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಬಂಧಿತ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಗಳ ಕ್ರಮವಿಧಿಗಳು ಈ ಬಗೆಯ ಅರಿವಿನ ಕಂದರವನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತವೆ. ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆನ್ನುವ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಇನ್ನಷ್ಟು ಅನುಭವ ಬೇಕಿರುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಲು ಸಂಕೀರ್ಣ ಕ್ರಮವಿಧಿಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ, ಮಕ್ಕಳು ಉಪಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ನೆನಪಿಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾರೆ; ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಕಾರಣವನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ. ಶಿಕ್ಷಕರ ತರಬೇತಿಯ ಅನುಭವದಿಂದ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಶಿಕ್ಷಕರ ವರ್ತನೆಯೂ ಇದಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವೇನಲ್ಲ. ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಮಕ್ಕಳು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಕಾರಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಯೋಚಿಸದೆ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ನೆನಪಿಡುತ್ತಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವರು ಅವನ್ನು ಸೂಕ್ತವಲ್ಲದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಅನ್ವಯಿಸುವ ತಪ್ಪನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೂಡಲು ನಾವು ಛೇದಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ಶಿಕ್ಷಕರು ಮತ್ತು ಮಕ್ಕಳು ಇಬ್ಬರೂ ತಿಳಿದಿರುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಸರಿಯೇ? ಹೌದು, ಸರಿ. ಆದರೆ ಇಷ್ಟು ಸಾಕೇ? ಇಲ್ಲ. ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಅರಿತಿರುವ ಮಗುವಿಗೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನಕ್ಕೆ ಲ.ಸಾ.ಅ. ವನ್ನು ಏಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ತಿಳಿದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿ, ಅನೇಕ ಮಕ್ಕಳು ಇದೇ 'ನಿಯಮ'ವನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯಿಸುವುದನ್ನು ಅನೇಕ ಬಾರಿ ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

- ಸಮ ಭಾಗಗಳ ಮಹತ್ವವನ್ನು ತಿಳಿಯದಿರುವುದು :ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದವು ಪೂರ್ಣವನ್ನು ಎಷ್ಟು ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಲಾಗಿದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸೂಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ, ಆ ಭಾಗಗಳು ಸಮನಾಗಿರಬೇಕು ಎಂದು ಸಹ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಯೆಂದರೆ ಭಾಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಗಮನ ನೀಡಿ ಅವು ಸಮನಾಗಿರುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಅಲಕ್ಷ್ಯ ಮಾಡುವುದು. ಈ ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಯು ಆಡುಭಾಷೆಯ ಬಳಕೆಯ ಕಾರಣದಿಂದಲೂ ಆಗಬಹುದು. ಉದಾ: ಅರ್ಧ ಲೋಟ ಹಾಲು ಅಥವಾ ಅರ್ಧ ರೊಟ್ಟಿ. ಅಲ್ಲಿ ಆ ಲೋಟವು ನಿಖರವಾಗಿ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ತುಂಬಿಲ್ಲದೇ ಇರಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಅರ್ಧಕ್ಕಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆ ಇರಬಹುದು. ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಹೇಳಿದಾಗ ಇಂಥ ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಗಳು ಪ್ರಕಟವಾಗುತ್ತವೆ.

- ಸನ್ನಿವೇಶವೊಂದನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯೊಂದನ್ನು ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸುವುದು:

ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಯೆಂದರೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣವೊಂದರ ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಪರಿಭಾವಿಸುವುದು. ಒಂದು ವಿಷಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಚಿತ್ರರೂಪದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲು ಹೇಳಿದಾಗ ಇದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾ: 3/5 ಮತ್ತು 7/4

3/5 ಅನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾದವರು ಪೂರ್ಣವನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸಿರುವ ಭಾಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಛೇದ ಎಂದು ತಿಳಿದಿರುತ್ತಾರೆ. ಆದರೆ 7/4 ಅನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಹೇಳಿದಾಗ ಅವರ ಅರಿವು ಏಕಾಏಕಿ ತಲೆಕೆಳಗಾಗುತ್ತದೆ! ಏಕೆ? ಬಹುಶಃ 4 ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ 7 ಭಾಗಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ? ಆದ್ದರಿಂದ 7 ರಲ್ಲಿ 4 ನ್ನು ತೋರಿಸಿಬಿಡುವುದು, ಅಷ್ಟೆ.

9 ನೆಯ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ನೀಡಲಾದ ಕಿರುಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಕೇಳಲಾಗಿತ್ತು. " ಒಂದು ಕಲ್ಲಂಗಡಿ ಹಣ್ಣನ್ನು 16 ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ನಾನು 7 ನ್ನು ತಿಂದೆನು. ನನ್ನ ಗೆಳೆಯನು 4 ಭಾಗಗಳನ್ನು ತಿಂದನು. ನಾವಿಬ್ಬರೂ ಸೇರಿ ಎಷ್ಟು ಕಲ್ಲಂಗಡಿ ಹಣ್ಣನ್ನು ತಿಂದೆವು? ಉತ್ತರವನ್ನು ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿ.". ತರಗತಿಯಲ್ಲಿದ್ದ 20 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 2 ಮಂದಿಗೆ ಉತ್ತರ ತಿಳಿಯಿತು. ಉಳಿದವರು ಬಗೆಬಗೆಯ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರು. ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಕುರಿತಾದ ಅವರ ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಗೆ ಈ ತಪ್ಪುಗಳು ಸಾಕ್ಷಿಯಾಗಿದ್ದವು.

ಇದನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದ ಒಂದು ಮಗು ಹೀಗೆ ಬರೆದಿದ್ದು ಕಂಡುಬಂದಿತು.

- ಕಲ್ಲಂಗಡಿ : 16
- ಚೂರುಗಳು:7
- ಗೆಳೆಯ:4
- ಒಟ್ಟು:52
- ಇನ್ನೊಂದು ಮಗು ಬರೆದದ್ದು: 16+7+4=27

ಈ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಗಳು ಎರಡು ಹಂತಗಳಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ: ಮೊದಲನೆಯದು ಮಕ್ಕಳು ವಾಕ್ಯರೂಪದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಓದುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಗ್ರಹಿಸುತ್ತಾರೆ / ಬಿಡಿಸಿಡುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದರ ಕುರಿತಾಗಿದೆ. ಎರಡನೆಯದು ಸಂಖ್ಯಾಸಮೂಹಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಇದು ಈ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಅಥವಾ ಬಹುಶಃ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತವಾಗಿರಬಹುದು. ಕೆಲವು ಮಕ್ಕಳು ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಓದುವಾಗ ಅದರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಸಂಬಂಧಿತ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹುಡುಕಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ ಮತ್ತು ಯಾವುದಾದರೂ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲು ಯತ್ನಿಸುತ್ತಾರೆ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಅಳವಡಿಸಬೇಕಿರುವ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿರದೆ ಅದು "ಯಾವುದೋ ಒಂದು" ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಕಾಣುವ ಉಳಿದೆಲ್ಲವೂ ಕೇವಲ ದಾರಿ ತಪ್ಪಿಸುವ ಉದ್ದೇಶವುಳ್ಳವು ಅಥವಾ ಅರ್ಥಹೀನವಾದ ಅಲಂಕಾರಗಳು ಎಂದು ಈ ಮಕ್ಕಳು ಭಾವಿಸಿದಂತೆ ತೋರುತ್ತದೆ. ಯಾವ ಉಪಕ್ರಮವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಬೇಕೆಂಬ ವಿಚಾರವನ್ನು ಅವರು ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಊಹಿಸಿದಂತೆ ಕಾಣುತ್ತಿಲ್ಲ. ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಗಳಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಂಡುಬರುವ ಎರಡನೆಯ ತಪ್ಪುಗ್ರಹಿಕೆಯು

ಸಂಖ್ಯಾಸಮೂಹದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಬಗ್ಗೆ. ಅನೇಕ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಸಂಖ್ಯಾಪದ್ಧತಿಯು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಅಥವಾ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸೀಮಿತವಾಗಿದೆ. ಡಬಲ್ ಡೆಕ್ಕರ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು (ಅಂದರೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು) ಸಂಖ್ಯಾಪದ್ಧತಿಯ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿ ನೋಡಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂತಹ ತಪ್ಪು ಕಲ್ಪನೆಗಳಿರುವ ಮಕ್ಕಳು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಆ ರೂಪದಲ್ಲಿ (ಅಂದರೆ, ಡಬಲ್ ಡೆಕ್ಕರ್ ರೂಪ) ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಿದಾಗ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾರೆ, ಆದರೆ ಅದು ಒಳಗೊಳ್ಳುವ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಅಥವಾ p / q ರೂಪದಲ್ಲಿ ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ತಪ್ಪು ಕಲ್ಪನೆಯ ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯು ಮಗುವಿಗೆ 11/16 ರ ಬದಲು 11 ಕಲ್ಲಂಗಡಿಗಳನ್ನು (ಇದು 7 ಮತ್ತು 4 ರ ಮೊತ್ತ) ಬರೆದ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದಿದೆ, ಇದು ತಿಂದ ಕಲ್ಲಂಗಡಿ ಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ತಿಳಿವಳಿಕೆ ಅನೇಕ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕೆಲವು ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಗಳಿಂದ ನಮಗೆ ಅರಿವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಿದಂತೆ ಮೊದಲ ಹಂತವೆಂದರೆ ಅಲ್ಲಿ p / q ರೂಪದ ಪರಿಚಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗಿಲ್ಲ. ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯವೇನೋ ಇದೆ; ಆದರೆ ಕೊಟ್ಟ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ಮಗು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಇನ್ನೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತಿಲ್ಲ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮಕ್ಕಳ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಗಳಾದ 16/5 ಮತ್ತು 7/4 ಈ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಮೊದಲ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಮಗು 16 (ಒಟ್ಟು ತುಣುಕುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ) ಅನ್ನು ಅಂಶವಾಗಿ (ಛೇದದ ಬದಲಾಗಿ) ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ಕಲ್ಲಂಗಡಿಯ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು p / q ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ.

- ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ, ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು:

  ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಮಕ್ಕಳು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದು ಮತ್ತು ಕಳೆಯುವುದನ್ನು ಕಾಣುತ್ತಲೇ ಇರುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು 7/16 + 4/16 ಎಂದು ಸರಿಯಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವುಳ್ಳ ಮಗುವು ಅಂತಿಮ ಉತ್ತರವನ್ನು 11/32 ಎಂದು ಬರೆದಿದೆ.
- ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಗಳು :

  ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವೆರಡರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದನ್ನು "ಹೊಡೆದು ಹಾಕುವುದು/ಕ್ಯಾನ್ಸಲ್ ಮಾಡುವುದು" ಎಂದು ಸಡಿಲವಾಗಿ ಹೇಳಿಬಿಡುತ್ತಾರೆ. ಇದರಿಂದ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವಂಥ ತಪ್ಪುಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ.

  $$\frac{7}{16}+\frac{4}{16}=\frac{7+4}{16}=\frac{7+1}{4}=\frac{8}{4}=2.$$

ಇದರಿಂದ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಅಂಶವೆಂದರೆ, ಒಂದು ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಅನುಸರಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ತಾನೆತ್ತಿಕೊಂಡಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರ ಸಿಗಬೇಕು ಎಂದು ಮಗು ಭಾವಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ, ಉತ್ತರ ಎಷ್ಟು ಅಸಂಬದ್ಧವಾಗಿದ್ದರೂ ಅದು ಮಗುವನ್ನು ವಿಚಲಿತಗೊಳಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

- ಛೇದಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೂಡು/ಕಳೆಯುವಾಗ ಅವೆರಡಕ್ಕೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಛೇದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಲ್ಲಿ ಸೋಲುವುದು: ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೂಡು/ಕಳೆಯುವಾಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಜಾತಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನಾಗಿ ಏಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಬೇಕೆಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅನೇಕವೇಳೆ ಅರಿತಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾ:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{7}=\frac{6}{10} \quad \text{or} \quad \frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{3}{9}.$$

ಅದರ ಹಿಂದಿರುವ ಕಾರಣ ಅಥವಾ ಅದರ ಅಗತ್ಯವನ್ನು ತಿಳಿಯದೆ ಕೇವಲ ಒಂದು ರಿವಾಜಿನಂತೆ ಲ.ಸಾ.ಅ. ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕೌಶಲವು ಅದರದೇ ಆದ ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬೆಳೆಸುತ್ತದೆ. ಈ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ.

$$\frac{7}{16}+\frac{4}{16}=\frac{1+7+1+4}{16}=\frac{8+5}{16}=\frac{13}{16}.$$

ಇಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಲ.ಸಾ.ಅ. ವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ (16). ನಂತರ ಅದನ್ನು 1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರ ಬದಲು ಅದನ್ನು ಎರಡೂ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿದ್ದು ತತ್ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ತಪ್ಪು ಉತ್ತರ ಬಂದಿದೆ.

- ಸಜಾತಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವಾಗ ಛೇದವನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು: ಸಂಕಲನದ ನಿಯಮದ ಎಲ್ಲೆ ಮೀರಿದ ಅನ್ವಯದ ಫಲವಿದು. ಅದನ್ನೇ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೂ ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ ಇಂಥ ತಪ್ಪುಗಳು ಸಂಭವಿಸುತ್ತವೆ.

$$\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}.$$

ಸಜಾತಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೂಡಲು ಬಳಸುವ ನಿಯಮವನ್ನೇ ಇಲ್ಲಿಗೂ ಎಳೆದು ತಂದಿರುವುದರ ಹಿಂದಿರುವ ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆ ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತದೆ.

- ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಭಾಗಾಕಾರದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ತಲೆಕೆಳಗಾಗಿಸಿ-ಮತ್ತು-ಗುಣಿಸಿ ಎನ್ನುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವಲ್ಲಿ ವಿಫಲತೆ ಎದ್ದು ಕಾಣುತ್ತದೆ: ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಭಾಗಾಕಾರದ ವಿಧಾನವು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಅನೇಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.

  ಉದಾ:

$$\frac{7}{4}\div\frac{3}{2}=\frac{7}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{21\times 8}{12}=\frac{168}{12}.$$

ಇಲ್ಲಿ ಮಗುವು ಭಾಗಿಸಬೇಕಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ತಲೆಕೆಳಗಾಗಿಸಿದೆ. ಆದರೆ, ಅದಾದ ನಂತರ ಅವೆರಡನ್ನು ಗುಣಿಸುವ ಬದಲು ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿದೆ. ಬಳಿಕ ಅಂಶದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದೆ.

ಇದು ಭಾಗಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಇನ್ನೊಂದು ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆ . ಗುಣಾಕಾರದ ಉಪಕ್ರಮದ ಅತಿಯಾದ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣ. ಇಲ್ಲಿ ನೋಡಿ.

$$\frac{2}{3}\div\frac{6}{7}=\frac{2}{1}\div\frac{2}{7}=\frac{2}{1}\times\frac{7}{2}=\frac{1}{1}\times\frac{7}{1}=\frac{7}{1}.$$

ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ಇದರ ನಿಹಿತಾರ್ಥವೇನು?

ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಗಳ ಅಧ್ಯಯನವು ಉಪಯುಕ್ತವೂ, ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವೂ ಆಗಿದೆ. ಇದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಗುವಿನ ಕಲಿಕೆಯ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಟವಾಗಿಸುತ್ತದೆಯಾದರೂ ಅದು ಅವನಿಗೆ / ಅವಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ವಿಶಿಷ್ಟವೆಂದೇನೂ ಅಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ

ಮಕ್ಕಳ ಮನಸ್ಸನ್ನು ಅರಿಯಲು ಇದೊಂದು ಕಿಟಕಿಯೂ ಆಗಿದೆ. ಮಕ್ಕಳು ಹೇಗೆ ಕಲಿಯುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು. ಗುರುತಿಸಲಾದ ತಪ್ಪುಗ್ರಹಿಕೆಯ ಕುರಿತಾದ ಚರ್ಚೆಯು ಆ ಮಗುವಿಗೆ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಮೂಡುವ ಮಿಥ್ಯಾಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರಿವಿನ ವಿಕಾಸದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಸ್ವೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ ತಮ್ಮ ಕಲಿಕೆ ಮತ್ತು ಕಲಿಕಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಆತ್ಮವಿಶ್ವಾಸವುಳ್ಳ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಶಿಕ್ಷಕರು ಕೇವಲ ಸರಿ-ತಪ್ಪುಗಳ ಕುರಿತಾದ ಚರ್ಚೆಗೇ ಸೀಮಿತವಾಗದೆ ದೋಷಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವ ಮತ್ತು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ಇದು ಅಪೇಕ್ಷಿಸುತ್ತದೆ.

ರಿಚಾ ಗೋಸ್ವಾಮಿ 2008 ರಿಂದ 2015 ರವರೆಗೆ ವಿದ್ಯಾ ಭವನ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಂಪನ್ಮೂಲ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದ್ದರು.

ಮುಂಬೈನ ಟಾಟಾ ಇನ್ಸ್ಟಿಟ್ಯೂಟ್ ಆಫ್ ಸೋಶಿಯಲ್ ಸೈನ್ಸ್ ನಿಂದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಸ್ನಾತಕೋತ್ತರ ಪದವಿ ಗಳಿಸಿ ಪ್ರಸ್ತುತ 'ಗುಣಮಟ್ಟದ ಶಿಕ್ಷಣದ ಕುರಿತು ಪೋಷಕರ ಗ್ರಹಿಕೆ' ಕುರಿತು ಪಿಎಚ್‌ಡಿ. ವ್ಯಾಸಂಗ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ ಅವರನ್ನು ಈ- ಮೈಲ್ ಮೂಲಕ (goswami84@gmail.com) ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದು.